第 5 講　確率分布

PART1　二項分布の期待値と分散

1　n を自然数とする。原点 O から出発して数直線上を n 回移動する点 A を考える。点 A は 1 回ごとに確率 p で正の向きに 3 だけ移動し，確率 $1-p$ で負の向きに 1 だけ移動する。ただし，$0<p<1$ とする。n 回の移動のうち正の向きの移動の回数を X，n 回移動した後の点 A の座標を Y とする。

(1)　$p=\dfrac{1}{3}$，$n=2$ のとき，確率変数 Y の分布，期待値，分散を求めよ。

(2)　確率変数 X の期待値，分散を求めよ。

(3)　確率変数 Y の期待値，分散を求めよ。

Point Pickup

確率変数 X が右の表の確率分布に従うとき

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_n	計
P	p_1	p_2	$\cdots$	p_n	1

期待値　$E(X)=x_1p_1+x_2p_2+\cdots\cdots+x_np_n$

$$=\sum_{k=1}^{n} x_kp_k$$

分散　$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$

確率変数 X が二項分布 $B(n,\ p)$ に従うとき，$q=1-p$ とすると

期待値　$E(X)=np$

分散　$V(X)=npq$

確率変数 X と定数 a，b について，$Y=aX+b$ とすると

期待値　$E(Y)=E(aX+b)=aE(X)+b$

分散　$V(Y)=V(aX+b)=a^2\,V(X)$

標準偏差　$\sigma(aX+b)=|a|\sigma(X)$

第5講　PART1　確認問題

n を自然数とする。4 と書かれたカードと -2 と書かれたカードが多数入っている箱からカードを1枚取り出すとき，4 のカードを取り出す確率を p，-2 のカードを取り出す確率を $1-p$ とする。ただし，$0<p<1$ とする。

この箱からカードを1枚取り出し，書かれた数を記録して箱の中に戻す操作を n 回繰り返す。このとき，4 のカードを取り出した回数を X，記録された数の総和を Y とする。

1　$p=\dfrac{1}{4}$，$n=2$ のとき，確率変数 Y の分布，期待値 $E(Y)$，分散 $V(Y)$ を求めよ。

Y の確率分布

Y	-4	ア	8	計
P	イ	ウ	エ	1

$E(Y)=$ オカ

$V(Y)=\dfrac{\text{キク}}{\text{ケ}}$

[イ ～ エ の選択肢]

① $\dfrac{1}{4}$　② $\dfrac{2}{4}$　③ $\dfrac{3}{4}$

④ $\dfrac{1}{16}$　⑤ $\dfrac{3}{16}$　⑥ $\dfrac{5}{16}$

⑦ $\dfrac{6}{16}$　⑧ $\dfrac{9}{16}$　⑨ $\dfrac{13}{16}$

2 確率変数 X の期待値 $E(X)$，分散 $V(X)$，および，Y の期待値 $E(Y)$，分散 $V(Y)$ をそれぞれ求めよ。

$E(X)=$ [コ]　　$V(X)=$ [サ]

$E(Y)=$ [シ]　　$V(Y)=$ [ス]

① np　　② $6np$

③ $n(1-p)$　　④ $6n(1-p)$

⑤ $6np-2n$　　⑥ np^2

⑦ $n(1-p)^2$　　⑧ $np(1-p)$

⑨ $6np(1-p)$　　⑩ $36np(1-p)$

[MEMO]

第 5 講　確率分布

PART1　二項分布の期待値と分散

1　n を自然数とする。原点 O から出発して数直線上を n 回移動する点 A を考える。点 A は 1 回ごとに確率 p で正の向きに 3 だけ移動し，確率 $1-p$ で負の向きに 1 だけ移動する。ただし, $0<p<1$ とする。n 回の移動のうち正の向きの移動の回数を X, n 回移動した後の点 A の座標を Y とする。

(1)　$p=\dfrac{1}{3}$，$n=2$ のとき，確率変数 Y の分布，期待値，分散を求めよ。

(2)　確率変数 X の期待値，分散を求めよ。

(3)　確率変数 Y の期待値，分散を求めよ。

(1)　$p=\dfrac{1}{3}$，$n=2$ のとき，確率変数 Y の値は

2 回負の向きに移動するとき　$(-1)+(-1)=-2$

1 回負，1 回正の向きに移動するとき　$(-1)+3=2$

2 回正の向きに移動するとき　$3+3=6$

$$P(Y=-2)=(1-p)^2=\left(1-\frac{1}{3}\right)^2=\frac{4}{9}$$

$$P(Y=2)={}_2\mathrm{C}_1\,p(1-p)=2\cdot\frac{1}{3}\cdot\left(1-\frac{1}{3}\right)=\frac{4}{9}$$

$$P(Y=6)=p^2=\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{1}{9}$$

Y の確率分布は下の表のようになる。

Y	-2	2	6	計
P	$\frac{4}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{1}{9}$	1

よって

Y の期待値　$E(Y)=(-2)\cdot\dfrac{4}{9}+2\cdot\dfrac{4}{9}+6\cdot\dfrac{1}{9}=\dfrac{6}{9}=\dfrac{2}{3}$

Y の分散　$V(Y)=\left\{(-2)^2\cdot\dfrac{4}{9}+2^2\cdot\dfrac{4}{9}+6^2\cdot\dfrac{1}{9}\right\}-\left(\dfrac{2}{3}\right)^2=\dfrac{68}{9}-\dfrac{4}{9}=\dfrac{64}{9}$

(2)　確率変数 X は二項分布 $B(n,\ p)$ に従うので

期待値　$E(X)=np$

分散　$V(X)=np(1-p)$

(3)　n 回の移動で，点 A は正の向きに $3X$，負の向きに $-(n-X)=X-n$ 移動する。

よって　$Y=3X+(X-n)=4X-n$

したがって

期待値　$E(Y)=E(4X-n)=4E(X)-n=4np-n$

分散　$V(Y)=V(4X-n)=4^2V(X)=16np(1-p)$

第 5 講　PART1　確認問題 解答

1

[正解] ア：2，イ：⑧，ウ：⑦，エ：④，
オカ：-1，キク：27，ケ：2

[解説]

$p=\dfrac{1}{4}$，$n=2$ のとき，確率変数 Y の値は

-2 のカードを 2 回取り出すとき

$$(-2)+(-2)=-4$$

-2 のカードを 1 回，4 のカードを 1 回取り出すとき

$$(-2)+4=2$$

4 のカードを 2 回取り出すとき

$$4+4=8$$

ゆえに

$$P(Y=-4)=(1-p)^2=\left(1-\frac{1}{4}\right)^2=\frac{9}{16}$$

$$P(Y=2)={}_2\mathrm{C}_1\,p(1-p)=2\cdot\frac{1}{4}\cdot\left(1-\frac{1}{4}\right)$$

$$=\frac{6}{16}$$

$$P(Y=8)=p^2=\left(\frac{1}{4}\right)^2=\frac{1}{16}$$

Y の確率分布は次の表のようになる。

Y	-4	**2**	8	計
P	$\boldsymbol{\frac{9}{16}}$	$\boldsymbol{\frac{6}{16}}$	$\boldsymbol{\frac{1}{16}}$	1

よって，Y の期待値 $E(Y)$ は [A]

$$E(Y)=(-4)\cdot\frac{9}{16}+2\cdot\frac{6}{16}+8\cdot\frac{1}{16}=\mathbf{-1}$$

Y の分散 $V(Y)$ は

[A]　確率変数 X の期待値，分散
確率変数 X が次の表の確率分布に従うとき

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_n	計
P	p_1	p_2	$\cdots$	p_n	1

期待値

$$E(X)=x_1p_1+x_2p_2+\cdots\cdots+x_np_n$$

$$=\sum_{k=1}^{n}x_kp_k$$

分散　$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$

$$V(Y)=\left\{(-4)^2\cdot\frac{9}{16}+2^2\cdot\frac{6}{16}+8^2\cdot\frac{1}{16}\right\}-(-1)^2$$
$$=\boldsymbol{\frac{27}{2}}$$

2

[正解] コ：①，サ：⑧，シ：⑤，ス：⑩

[解説]

確率変数 X は二項分布 $B(n,\ p)$ に従うから

期待値　$E(X)=\boldsymbol{np}$

分散　$V(X)=\boldsymbol{np(1-p)}$　[B]

また，n 回の操作で，4 のカードを X 回，-2 のカードを $(n-X)$ 回取り出すから

$$Y=4\cdot X+(-2)\cdot(n-X)=6X-2n$$

したがって

期待値　$E(Y)=E(6X-2n)$
$=6E(X)-2n$　[C]
$=\boldsymbol{6np-2n}$

分散　$V(Y)=V(6X-2n)$
$=6^2\,V(X)$
$=\boldsymbol{36np(1-p)}$

> [B]　二項分布と期待値，分散
> 確率変数 X が二項分布 $B(n,\ p)$ に従うとき，$q=1-p$ とすると
> 期待値　$E(X)=np$
> 分散　$V(X)=npq$

> [C]　確率変数 X と定数 a, b について，$Y=aX+b$ とすると
> 期待値　$E(Y)=E(aX+b)$
> $=aE(X)+b$
> 分散　$V(Y)=V(aX+b)=a^2\,V(X)$
> 標準偏差
> $\sigma(Y)=\sigma(aX+b)=|a|\sigma(X)$